Lineaire Algebra I

2 Februari 2012

university of groningen

Het tentamen bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het begin van de vraagstukken. Het totale aantal punten die u kunt bereiken is 100. U krijgt 8 punten gratis. Each question is also translated into English. You may answer in Dutch or English.

1. (Nederlands) [4+4+4+4+4 **Punten.**]

   Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

   met $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Bestaan er waarden van β waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ strijdig is?

   (b) Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ precies 1 oplossing heeft, en bepaal die oplossing.

   (c) Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oneindig veel oplossingen heeft, en bepaal de oplossingsverzameling.

   Stel $\mathbf{b}$ is de vector gegeven door

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (d) Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ strijdig is.

   (e) Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent is, en bepaal de oplossingsverzameling.

1. (English) [4+4+4+4+4 **Points.**]

   Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

   with $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Are there values for β for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ is inconsistent?

   (b) Determine all values of β for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has exactly 1 solution, and determine this solution.

   (c) Determine the values of β for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has infinitely many solutions, and determine the solution set.

Let $\mathbf{b}$ be the vector given by

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Determine all values of β for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is inconsistent.

(e) Determine all values of β for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent, and determine the solution set.

2. (Nederlands) [**4+4+4+4 Punten.**]

Stel A is een $m \times n$ matrix en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, met onbekende $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Laat $\mathcal{K}$ de oplossingsverzameling zijn van dit stelsel. De nulruimte $N(A)$ is de oplossingsverzameling van het bijbehorende homogene stelsel $A\mathbf{x} = 0$. $R(A)$ is de kolomruimte van A.

(a) Toon aan dat $N(A)$ een lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}^n$.

(b) Toon aan: $\mathcal{K} \neq \emptyset$ dan en slechts dan als $\mathbf{b} \in R(A)$.

(c) Laat $\mathbf{v} \in \mathcal{K}$. Toon aan dat geldt

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in N(A)\}.$$

(d) Is $\mathcal{K}$ een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$? Leg uit.

2. (English) [**4+4+4+4 Points.**]

Let A be a $m \times n$ matrix and $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Consider the linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, with unknowns $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Let $\mathcal{K}$ be the solution set of this system. The nullspace $N(A)$ is the solution set of the solution set of the corresponding homogeneous system $A\mathbf{x} = 0$. $R(A)$ is the column space of A.

(a) Show that $N(A)$ is a linear subspace of $\mathbb{R}^n$.

(b) Show that: $\mathcal{K} \neq \emptyset$ if and only if $\mathbf{b} \in R(A)$.

(c) Let $\mathbf{v} \in \mathcal{K}$. Show that

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in N(A)\}.$$

(d) Is $\mathcal{K}$ a linear subspace of $\mathbb{R}^n$? Explain.

3. (Nederlands) [**4+4+4 Punten.**]

Stel dat A en B $n \times n$ matrices zijn, en definieer een $2n \times 2n$ matrix door

$$M = \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

(a) Toon aan: als A en B niet-singulier zijn dan is M niet-singulier.

(b) Stel dat A en B niet-singulier zijn. Bepaal de inverse van M.

(c) Bekijk nu de matrixvergelijking

$$\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

met als onbekenden de $n \times n$ matrices X en Y. Stel dat A en B niet-singulier zijn. Bepaal X en Y.

3. (English) [4+4+4 **Points.**]

Let A and B be $n \times n$ matrices, and define a $2n \times 2n$ matrix as

$$M = \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

(a) Show that: if A and B are nonsingular then M is nonsingular.

(b) Suppose A and B are nonsingular. Determine the inverse of M.

(c) Consider the matrix equation

$$\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

for the unknown $n \times n$ matrices X and Y. Suppose that A and B are nonsingular. Determine X and Y.

4. (Nederlands) [4+4+4+4+4 **Punten.**]

P_3 is de vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner dan 3, met reële coefficienten. Definieer de afbeelding $T : P_3 \to \mathbb{R}^3$ door

$$T(p(x)) := \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{pmatrix}.$$

(a) Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.

(b) Bepaal de matrix A van T ten opzichte van de geordende basis $E := \{1, x, x^2\}$ in P_3 en de standaard basis $F = \{e_1, e_2, e_3\}$ in $\mathbb{R}^3$.

(c) Bepaal de rang van A.

(d) Wat volgt hieruit over de dimensie van de kern $\ker(T)$ van T?

(e) Bepaal $\ker(T)$.

4. (English) [4+4+4+4+4 **Points.**]

P_3 is the vector space of all polynomials of degree less than 3 with real coefficients. Define the map $T : P_3 \to \mathbb{R}^3$ as

$$T(p(x)) := \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{pmatrix}.$$

(a) Show that T is a linear map.

(b) Determine the matrix A of T with respect to the ordered basis $E := \{1, x, x^2\}$ in P_3 and the standard basis $F = \{e_1, e_2, e_3\}$ in $\mathbb{R}^3$.

(c) Determine the rank of A.

(d) What does this imply for the dimension of the kernel $\ker(T)$ of T?

(e) Determine $\ker(T)$.

5. (Nederlands) [4+4+4 **Punten.**]

   Laat $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn, en definieer een deelruimte S van $\mathbb{R}^n$ door $S := \text{span}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Definieer een $n \times n$ matrix A door $A := \mathbf{x}\,\mathbf{y}^T + \mathbf{y}\,\mathbf{x}^T$.

   (a) Toon aan dat A symmetrisch is.

   (b) Bewijs dat $N(A) = S^\perp$.

   (c) Toon aan dat de rang van A gelijk is aan 2.

5. (English) [4+4+4 **Points.**]

   Let $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ be linearly independent vectors in $\mathbb{R}^n$, and define a subspace S of $\mathbb{R}^n$ as $S := \text{span}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Define an $n \times n$ matrix A as $A := \mathbf{x}\,\mathbf{y}^T + \mathbf{y}\,\mathbf{x}^T$.

   (a) Show that A is symmetric.

   (b) Show that $N(A) = S^\perp$.

   (c) Show that the rank of A is equal to 2.

6. (Nederlands) [4+4+4+4 **Punten.**]

   Gegeven is de matrix
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bepaal het karakteristieke polynoom van A.

   (b) Bepaal de eigenwaarden van A.

   (c) Bepaal de eigenvectoren van A.

   (d) Diagonaliseer A (d.w.z. geef een niet-singuliere matrix X en een diagonaalmatrix D zodat $D = X^{-1}AX$).

6. (English) [4+4+4+4 **Points.**]

   Consider the matrix
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine the characteristic polynomial of A.

   (b) Determine the eigenvalues of A.

   (c) Determine the eigenvectors of A.

   (d) Diagonalize A (i.e. determine a nonsingular matrix X and a diagonal matrix D such that $D = X^{-1}AX$).